الخميس 23/10/2014 ③ دقة ونعومة التجزئة

$\boxed{3}$ اذا كانت f ذ ت م على الفترة $[a,b]$ فكون أيضاً ذ ت م على أية فترة جزئية منها مثل:

$$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$$

يكون عندئذ:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

وهذا ينتج من التعريف وملاحظة سابقة مباشرة.

- دقة ونعومة التجزئة:

نقول عن التجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ إنها أدق أو أنعم أو أقوى من التجزئة P_2 لنفس الفترة اذا كانت $P_2\subset P_1$. كما نقول أيضاً أن التجزئة P_2 أخشن أو أضعف من P_1.

مثال: $P_1=\{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\}$

الجديدة P_2 والإضافات $P_1\subset P_2$.

اذا أخذنا الفترة $[0,1]$ فإن كل من $P_1=\{0,\frac{1}{2},1\}$

$P_2=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$

~~كل~~ تجزئة لهذه الفترة حيث:

$$P_1\subset P_2$$

لاحظ هنا من خلال المثال السابق أنه إذا $P_1\subset P_2$ فإن $\lambda(P_1)\ge\lambda(P_2)$
إلا أن العكس ليس صحيحاً.

نعود إلى الدوال محدودة التغير:

ملاحظات:

ت) تكون الدالة f ذ.ت.م على الفترة $]-\infty, \infty[$ فيما اذا كانت هذه الدالة ذ.ت.م على اية فترة $[A, B]$ ويوجد ثابت موجب M لا يتعلق بالعددين A, B بحيث أن التغير الكلي $\overset{B}{\underset{A}{V}} \le M$.

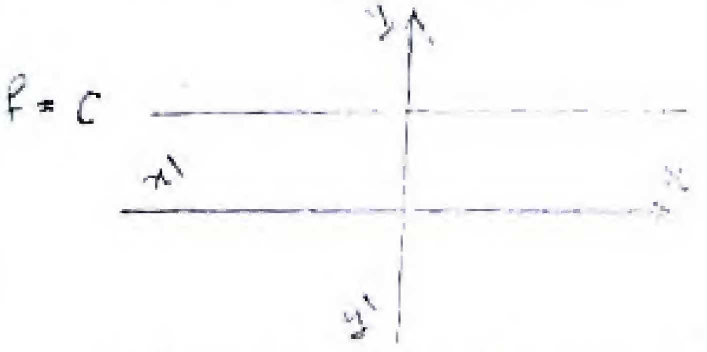
وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي :

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \sup_{\substack{A<0 \\ B>0}} \{ \overset{B}{\underset{A}{V}}(f) \} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}} \overset{B}{\underset{A}{V}}(f) \le M.$$

ث) لدينا دائماً $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq 0$ بغض النظر عن الفترات غير محدودة. مثلاً اذا كانت $f = c$ ثابت حيث $\forall x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ فإن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$
وهذا شرط لازم وكافي أي

$$f = c \iff \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0 .$$

وخطها البياني مستقيم يوازي محور $x'x$.



مثال:

افحص لدينا الدالة $f(x) = 2x + 3$ معرفة على $[0, 2]$ بين أنها ذ.ت.م عليها واحسب تغيرها الكلي أي $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)$. باستخدام التعريف.

الحل:

لنأخذ التجزئات الثلاث التالية:

$$P_1 = \{0, 1, 2\}$$

$$P_2 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2\}$$

$$P_3 = \{0, \tfrac{1}{10}, 0.5, 1, 1.5, 1.9, 2\} .$$

بعد كل عدد عادي يوجد عدد غير عادي .

عندئذٍ نشكل المجموع :

$$v(f ; P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x)| = 2(x_n - x_0)$$

حيث الدالة متزايدة تماماً فالمجموعات تتداخل الحدود مع بعضها .

$$= 2(2 - 0) = 4.$$

وحيث انه ينتج 4 مهما طلبنا التجزئات .

يحقق المثال : $\Delta f(x) = | f(x_k) - f(x_{k-1}) | \geq 0$

ومنه

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(2x+3) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \{ v \} = 4.$$

مثال :

لتكن لدينا الدالة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in Q = [0,1] \cap Q \\ & ; \quad x \in [0,1] . \\ -1 & ; \quad x \in \tilde{Q} \ (\text{مجموعة الأعداد غير العادية}) = [0,1] - Q. \end{cases}$$

و $R = Q \cup \tilde{Q}$.

هذه الدالة تعرف باسم دالة ديريكليه وهي دالة محدودة وليست مستمرة في أي نقطة (نقاط انقطاع من النوع الثاني) . وهي دالة ليست ذات تغير محدود على الفترة $[0,1]$ وهكذا لـ R اذا أخذنا التجزئة :

$$\{ x_0 = 0, y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_n, x_n = 1 \} = P$$

حيث : $x_1, \dots, x_n$ أعداد نسبية .

$y_1, \dots, y_n$ " غير عادية (غير نسبية) .

ونشكل المجموع التالي :

$$v(\varphi ; P) = \sum_{k=1}^{n} | \Delta f(x_k) |$$

$$= |\varphi(y_1) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_1) - \varphi(y_1)| + |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|$$

$$= \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n \text{ مرة}} = 2n.$$

$\sin n\pi = 0$ $\qquad$ $\cos(n+1)\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$ $\qquad$ (يحسب مثلا cos, sin بالتجزئة حسب ادخال n).

لا يمكن جعل هذا المقدار $< M$ وهذا المقدار غير محدود (أي المجموع) وعندها نكتب:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \lim_{n\to\infty}(2n) = \infty \Rightarrow$$ الدالة ليست ذ.ت.م على $[0,1]$

ملاحظة:

هذه الدالة ليست محدودة التغير على أية فترة جزئية مغلقة من R وليست ذ.ت.م على R.

ملاحظة المثال السابق $P_n[0,1]$

$$P_n[0,1] = \{x_0, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\} \; ; \; n \in N$$

خواص الدالة ذ.ت.م على فترة ما.

لتكن الفترة $[a,b]$ من المستقيم الحقيقي محدودة ومغلقة ولنحاول التذكير بخواص هذه الدالة على الفترة $[a,b] \subseteq R$.

P_1) اذا كانت f دالة ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ تكون محدودة عليها.

[لا أن العكس غير صحيح بشكل عام].

مثال: دالة ديرخليه محدودة وليست ذ.ت.م. مهما أي تجزئة.

[يجادل ديرخليه ومن التجزئة تأخذ نقطة $x \in Q$ أو $x \notin Q$].

الاثبات:

لدينا f ذ.ت.م على $[a,b]$ ولنحاول اثبات $|f| \le M \;\; \forall x \in [a,b]$

لتكن $P = \{a, x, b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ و $a < x < b$

عندئذ يكون:

$$V(f;P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

لأن $\sup V = \overset{b}{\underset{a}{V}}$.

$$\Rightarrow \forall x \; ; \; a < x < b$$

يكون: $f(x) = |f(x) - f(a) + f(a)| \le$ حسب خواص القيمة المطلقة

$$\le |f(x) - f(a)| + \underbrace{|f(a)|}_{\text{ثابت}}$$

$$|f(x) - f(a)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}$$

$$\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| = M \Rightarrow |f| \le M \; ; \; x \in [a,b]$$

أي الدالة محدودة على $[a,b]$

كما يمكننا تعميم هذه الخاصية على R. $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

P_1: لنقدم المثال التالي على أن العكس غير صحيح بشكل عام على الفترة $[a,b]$ كمثال على الدوال ذ.ت.م وهي ديرخليه المحدودة على أي فترة، ولكنها ليست ذ.ت.م على هذه الفترة.

$$|\varphi| \le 1 \Leftarrow \quad \varphi \notin BV_{[a,b]} .$$

P_2) إذا كانت f, g دالتان ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ عندئذ تكون كل من الدوال التالية ذ.ت.م عليها.

1) $|f|, \; f^2, \; \frac{1}{f} ; (|f| \ge \alpha > 0) \; ; \; \alpha \cdot f \; ; \alpha \in R^*$
$f \neq 0$

من أجل كل $x \in [a,b]$

2) $\alpha f + \beta g \; , \; f \cdot g \; , \; \frac{f}{g} ; (|g| \ge \alpha > 0)$

حيث $\alpha, \beta \in R^*$ ، $x \in [a,b]$.

نتيجة:

إذا كانت f ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ فإن كلا من الدوال: $f \cdot f$

$f^2, f^3, \ldots, f^k(x) \qquad (2 \le k \le n)$

ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$. وكذلك:

$\frac{1}{f^2}, \frac{1}{f^3}, \ldots, \frac{1}{f^k} \; ; \; \begin{cases} x \in [a,b] \\ 2 \le k \le n \end{cases}$

$\frac{1}{f} \; \frac{1}{f^1}$

ليست ∞،
عدد محدود

$(|f| \ge \alpha > 0)$ ،

إثبات أن الدالة $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$:

بما أن f ذ.ت.م عليها و $|f| \ge \alpha > 0$.

أي $-\alpha \ge f \ge \alpha$

أي $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$

$|f| \ge \alpha \Rightarrow \frac{1}{f} \le \frac{1}{\alpha}$

لتكن التجزئة :

$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$

ولنشكل المجموع :

$$v\left(\frac{1}{f} ; P\right) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right|$$

بتوحيد المقامات :

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| \cdot f(x_{k-1})}$$ ← من خاصية قيمة مطلقة

$$\Rightarrow |f| \ge \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{|f|} \le \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum \le \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

$$\le \frac{1}{\alpha^2} \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) \Rightarrow$$ $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$ وتغيرها الكلي :

$$. \boxed{\overset{b}{\underset{a}{V}} \left(\frac{1}{f}\right) \le \frac{1}{\alpha^2} \overset{b}{\underset{a}{V}} (f)}$$

سؤال :

أعد نفس الطلب من أجل : $|f| , f+g , \frac{f}{g} ; |g| \ge \alpha > 0$

تمارين حل f و αf و $f \cdot g$ إذ أن α عدد $\in R$.

(P_5) إذا كانت $f \in BV[a,b]$ على $[a,b]$ وكان $a < c < b$ فإن هذه الدالة تكون ذ.ت.م على كل من الفترتين $[a,c]$ ، $[c,b]$ والعكس صحيح وعندها نكتب :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (f) = \overset{c}{\underset{a}{V}} (f) + \overset{b}{\underset{c}{V}} (f) .$$

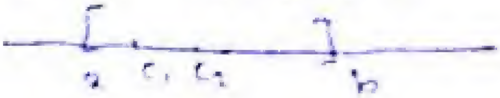
مثال .

حيث نتحقق من أجل الدالة $f(x) = \sin x ; x \in [0,\pi]$

$. 0 < c = \frac{\pi}{2} < \pi$

ويمكن تعميم ذلك كنتيجة لهذه الخاصية:

اذا كانت: $a < c_1 < \dots < c_n < b$ تجزئة للفترة $[a,b]$



وكانت $f \in BV[a,b]$ فإنها تكون ذات تغير محدود على كل من الفترات:
$[a,c_1] , [c_1,c_2] , \dots , [c_n,b]$

كل الفترات مغلقة

وتتحقق: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \dots + \overset{b}{\underset{c_n}{V}}(f)$.

ملاحظة:

تعمم هذه الخواص على الفترة $R =]-\infty,\infty[$ حيث f, g دوال ذات تغير محدود عليها. عندها نحصل على:

1) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f \pm g) \le \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f)$.

2) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f . g)$ وبالمثل

3) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}\left(\frac{1}{f}\right)$

بالنسبة لـ f يكون لدينا:
$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{c}{V}}(f)$. ; $-\infty < c < \infty$

ملاحظة (تعميم):

اذا كانت f مطردة ومحدودة على الفترة $]-\infty,\infty[$ عندها تكون الدالة f ذات تغير محدود عليها كمثال الدالة الثابتة معرفة على R بأكمله هي دالة تزايدية (وتناقصية) كما أنها محدودة وبالتالي تكون ذات تغير محدود.

- الدالة الدورية غير محدودة. والدالة $\sin$ ذات تغير محدود على R بأكمله.

الدالة ليست محدودة ولا يمكن أن تكون ذات تغير محدود على أي فترة.

$\tan$ اذا أخذنا: $\tan: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R$ فستكون

مثال:

الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $]-\infty,\infty[$ ليست ذات تغير محدود لأنها على الأقل ليست محدودة.